Mathe-Treff OTW 2022

Lösungen für die gymnasiale Oberstufe (EF/Q1/Q2)

AUFGABE 1 (Der Baumwipfelpfad)

L = linker Fuß R = rechter Fuß S = überspringen

Stufe	Ayse	Bertha	Christine
1	L	L	L
2	R	S	S
3	L	R	S
4	R	S	R
5	L	L	S
6	R	S	S
7	L	R	L
8	R	S	S
9	L	L	S
10	R	S	R
11	L	R	S
12	R	S	S
13	L	L	L

a) Aus der Tabelle sieht man, dass es Stufe 7 ist.

b) Ayse: Stufe 2; Bertha: Stufe 3; Christine: Stufe: 4

c) Aus der Tabelle sieht man, dass es Stufe 13 ist.

d) Ayse betritt immer eine gerade Stufe mit dem rechten Fuß und Bertha immer eine ungerade Stufe mit dem rechten Fuß, also können sie nie mit dem rechten Fuß die gleiche Stufe betreten.

e) Das Problem reduziert sich auf eine Fibonacci-Folge.

Somit hat Finn 21 Möglichkeiten, die 8 Stufen zu bezwingen.

Folgende Erklärung:

Wenn die Treppe nur 1 Stufe hat, gibt es nur eine Möglichkeit, denn er springt immer auf die erste Stufe.

Auch bei 2 Stufen gibt es nur eine Möglichkeit, denn mit dem zweiten Schritt hat er die

Treppe hinter sich.

Wie ist nun eine Treppe von n Stufen zu bewältigen:

Der Anfang ist klar:

f(1) = 1; f(2) = 1;

Nehmen wir an, wir wüssten, auf wie viele Weisen Fritz Treppen bis 5 Stufen bewältigen kann, uns ist also f(5), f(4), f(3) ... bekannt für eine Sechsertreppe hat er nun wieder 2 Möglichkeiten: Er nimmt eine Stufe oder 2 Stufen, kommt also von der 4. oder der 5. Stufe. Die 4. Stufe hat er auf f(4) , die 5. auf f(5) Weisen erreicht. Er nimmt die Sechsertreppe also auf f4) + f(5) Weisen, oder

f(n+1) = f(n)+ f(n-1)

Die Lösung des Problems lässt sich nun rekursiv finden:

f(1) = 1; f(4) = 3; f(7) = 13;

f(2) = 1; f(5) = 5; f(8) = 21;

f(3) = 2; f(6) = 8;

Es gibt also 21 Möglichkeiten, die Treppe in seinem Sinne hochzusteigen.

f) Das Problem reduziert sich auf eine Fibonacci-Folge.

Somit hat Finn 46 368 Möglichkeiten, die 24 Stufen zu bezwingen.

Folgende Erklärung mag helfen:

Wenn die Treppe nur 1 Stufe hat, gibt es nur eine Möglichkeit, denn er springt immer auf die erste Stufe. Auch bei 2 Stufen gibt es nur eine Möglichkeit, denn mit dem zweiten Schritt hat er die Treppe hinter sich.

Wie ist nun eine Treppe von n Stufen zu bewältigen:

Der Anfang ist klar: f(1) = 1; f(2) = 1;

Nehmen wir an, wir wüssten, auf wie viele Weisen Fritz Treppen bis 10 Stufen bewältigen kann, uns ist also f(10, f(9), f(8) ... bekannt. Für eine Elfertreppe hat er nun wieder 2 Möglichkeiten: Er nimmt eine Stufe oder 2 Stufen, kommt also von der 9. oder der 10. Stufe. Die 9. Stufe hat er auf f(9) , die 10. auf f(10) Weisen erreicht. Er nimmt die Elfertreppe also auf f(9) + f(10) Weisen, oder

f(n+1) = f(n)+ f(n-1)

Die Lösung des Problems lässt sich nun rekursiv finden:
f(1) = 1; f(4) = 3; f(7) = 13; f(10) = 55; f(13) = 233; f(16) = 987; f(19) = 4181; f(22) = 17711;
f(2) = 1; f(5) = 5; f(8) = 21; f(11) = 89; f(14) = 377; f(17) = 1597; f(20) = 6765; f(23) =28657;
f(3)= 2; f(6) = 8; f(9) = 34; f(12) = 144; f(15) = 610; f(18) = 2584; f(21) = 10946; f(24) = 46368;

Bezirksregierung
Düsseldorf

g)

Finn kann eine, zwei oder drei Stufen auf einmal nehmen. Zur 24. Stufe gelangt er also in einem Schritt von der 21., 22. oder 23. Stufe. Wir brauchen also nur zu wissen, wie viele Möglichkeiten er hat, um zu diesen Stufen zu kommen.

Anzahl "n" der Treppenstufen	Anzahl der Schritte	Schrittlänge (in Stufenanzahl)	Möglichkeiten Kombination Anzahl		Entwicklung (nachträglich)
1	1	1		1	g(1)=1
2	1	1		1	g(2)=1
3	3	1	1+1+1	2	g(3)=2
	2	1 und 2			
4	4	1	1+1+1+1	4	g(4) = 4= g(3)+g(2)+g(1)
	3	1 und 2	1+1+2		
	3	1 und 2	1+2+1		
	2	1 und 3	1+3		
5	5	1	1+1+1+1+1	7	g(5) = 7= g(4)+g(3)+g(2)
	4	1 und 2	1+1+1+2		
	4	1 und 2	1+1+2+1		
	4	1 und 2	1+2+1+1		
	3	1 und 2	1+2+2		
	3	1 und 3	1+1+3		
	3	1 und 3	1+3+1		
6	6	1		13	g(6) = 13 = g(5)+g(4)+g(3)
	5	1 und 2			
	5	1 und 2			
	5	1 und 2			
	5	1 und 2			
	4	1 und 2			
	4	1 und 2			
	4	1 und 2			
	4	1 und 3			
	4	1 und 3			
	4	1 und 3			
	3	1 und 2 und 3			
	3	1 und 2 und 3			
7				44	g(7) = 44 = g(6)+g(5)+g(4)
8				64	g(8) =64 = g(7)+g(6)+g(5)

Es wird klar, dass das Prinzip für alle Stufen ab n=4 gilt: wir (oder Finn) müssen nur die Anfangszahlen g(1)=1, g(2)=1 und g(3)=2 kennen.

Folglich ergibt sich: g(1)=1, g(2)=1 g(3)=2 g(4)=4 g(5)= 7 g(6)=13 g(7)=24
g(8)=44, g(9)=81, g(10)=149, g(11)=274, g(12)=504, g(13)=927, g(14)=1705
g(15)=3136, g(16)=5768, g(17)=10609, g(18)=19513, g(19)=35890, g(20)=66012,
g(21)=121415, g(22)=223317, g(23)=410 744, g(24)=755476

Finn könnte also auf 755476 verschiedene Arten unter den genannten Bedingungen über die 24 Stufen hinaufsteigen.

h)

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ist der Anfang einer Folge von Fibonacci-Zahlen.

Rekursiv aufgeschrieben lassen sich die Folgeglieder f(n) so bilden

$f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ für $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ mit $f(1) = 1$ und $f(2) = 1$.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

(Formel von Moivre-Binet, mit z.B. $f_3 = 2$, $f_8=21$)

AUFGABE 2 (Pyramiden in Ägypten)

Wir gehen von einer geraden quadratischen Pyramide aus, da die Aufgabe ansonsten nicht eindeutig lösbar ist.

Die Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit Seitenlänge a. Ihre räumliche Höhe ist h.

Die Oberfläche der Pyramide besteht aus einer quadratischen Grundfläche (mit dem Flächeninhalt a^2) und vier gleichschenkligen Dreiecken, die gemeinsam den Mantel bilden. Für die Höhe der Manteldreiecke gilt aufgrund des Satzes des Pythagoras ${h_M}^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$.

Insgesamt gilt für das Volumen und die Oberfläche:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h \text{ und } O = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$$

Laut Aufgabenstellung sind die Zahlwerte für das Volumen und die Oberfläche gleich. Daher gilt:

$$\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$$

Wir multiplizieren mit 3 und dividieren durch a (das nicht Null sein kann, da man ansonsten keine Pyramide hätte):

$$a \cdot h = 3a + 3 \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$$

Dann subtrahieren wir 3a und klammern a aus:

$$a \cdot h - 3a = 3 \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$$
$$a \cdot (h - 3) = 3 \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$$

Nun quadrieren wir beide Seiten, um die Wurzel zu eliminieren. Außerdem lösen wir die Klammern auf:

$$a^2 \cdot (h-3)^2 = 9 \cdot (4h^2 + a^2)$$
$$a^2 \cdot (h^2 - 6h + 9) = 36h^2 + 9a^2$$
$$a^2h^2 - 6a^2h + 9a^2 = 36h^2 + 9a^2$$

Jetzt subtrahieren wir $9a^2$ und dividieren durch h:

$$a^2h - 6a^2 = 36h$$

Diesen Ausdruck können wir nach h auflösen:

$$a^2h - 36h = 6a^2$$
$$(a^2 - 36) \cdot h = 6a^2$$
$$h = \frac{6a^2}{a^2 - 36}$$

Da h eine ganze Zahl sein muss, muss der Nenner $a^2 – 36$ ein Teiler des Zählers $6a^2$ sein. Dann muss auch a^2-36 ein Teiler von $6a^2 – 6 (a^2 – 36) = 216$ sein.

Für jeden Teiler t von 216, der durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist, wäre t + 36 gerade, aber nicht durch 4 teilbar, also keine Quadratzahl. Analog können wir auch die durch 3, aber nicht durch 9 teilbaren Teiler t von 216 ausschließen, da auch dann t + 36 nicht die Quadratzahl a^2 ergeben kann.

Es verbleiben die Teiler 1, 4, 8, 9, 27, 36, 72, 108 und 216. Von diesen erfüllt nur t = 108 die Bedingung, dass t + 36 eine Quadratzahl ergibt, nämlich t + 36 = 144 = a^2.

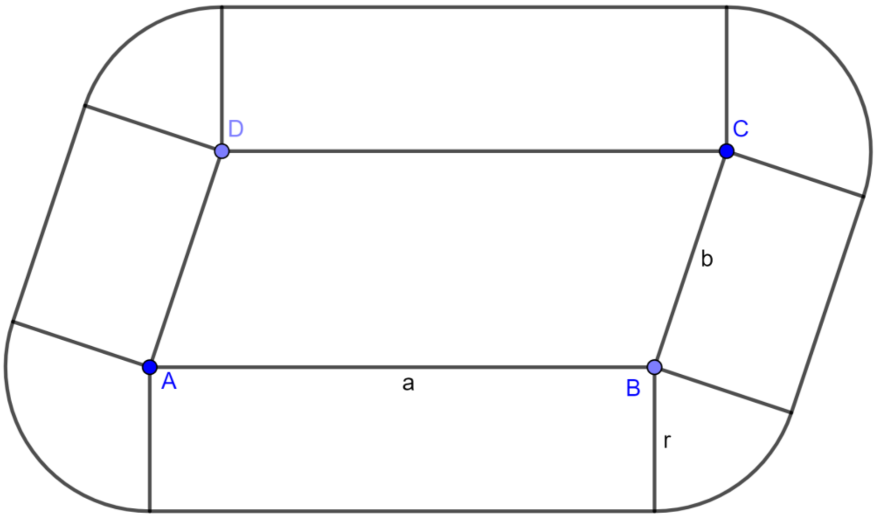
Also ist a = 12 (Meter). Daraus ergibt sich dann h = 8 (Meter). Das Volumen und die Oberfläche haben dann jeweils den Zahlenwert 384.

AUFGABE 3 (Der bewegte Kreis)

Wir müssen zwei Fälle voneinander unterscheiden:

Fall 1: Wenn der Radius mindestens zweimal so groß ist wie die Höhe des Parallelogramms wird die gesamte Fläche des Parallelogramms überstrichen.

Fall 2: Wenn der Radius kürzer ist als zweimal die Höhe des Parallelogramms, so wird innerhalb des Parallelogramms ein Teil der Fläche nicht überstrichen.



(Bild: Parallelogramm01)

Fall 1:

Die überstrichene Fläche kann in neun Teilflächen zerlegt werden.

Zwei dieser Flächen sind Rechtecke, welche die Seite a des Parallelogramms als Länge und den Radius r als Breite haben. Sie haben jeweils den Flächeninhalt $a \cdot r$

Zwei weitere dieser Flächen sind Rechtecke, welche die Seite b des Parallelogramms als Länge und den Radius r als Breite haben. Sie haben jeweils den Flächeninhalt $b \cdot r$

Vier Flächen sind Kreissektoren, welche von jeweils zwei der vier zuerst betrachteten Flächen umrandet werden. Alle diese Kreissektoren haben jedoch den Radius r und ihre Winkel müssen sich zu 360° ergänzen. Sie können also zu einem Kreis zusammengesetzt werden, dessen Fläche gleich πr^2 ist.

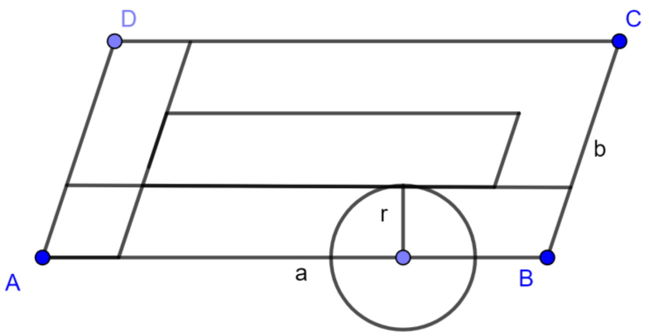
Zu diesen acht Flächen kommt als letztes das Parallelogramm dazu. Seine Fläche kann berechnet werden mit a mal Höhe von a, also $a \cdot h_a$

Insgesamt ergibt sich dann für die gesuchte Fläche: $A = 2ar + 2br + \pi r^2 + ah_a$

Fall 2:

Bei Fall 2 entstehen außerhalb des Parallelogramms dieselben acht Flächen wie in Fall 1. Der Flächeninhalt dieser Teilflächen kann beschrieben werden mit $A = 2ar + 2br + \pi r^2$.

Beim Parallelogramm fehlt jedoch ein Teil der Fläche. Der fehlende Teil hat selbst auch wieder die Form eines Parallelogramms, da die überstrichene Fläche über eine Strecke der Länge r hinweg in das erste Parallelogramm hineinreicht. Die Länge dieses Parallelogramms ist $a - 2k$ und seine Höhe $h_a - 2r$. Der fehlende Teil hat also einen Flächeninhalt der Größe $(a - 2k) \cdot (h_a - 2r) = a\,h_a - 2ar - 2k\,h_a + 4kr$.



Nach dem zweiten Strahlensatz gilt: $k : r = b : h_a$ und damit folgt $k = br / h_a$.

Damit lässt sich der Flächeninhalt des fehlenden Teils umformen zu

$a\,h_a - 2ar - 2\,br/h_a \cdot h_a + 4\,br/h_a \cdot r = ah_a - 2ar - 2br + 4br^2/h_a$

Damit ergibt sich insgesamt:

$A = 2ar + 2br + \pi r^2 + ah_a - (ah_a - 2ar - 2br + 4br^2/h_a)$

$= 2ar + 2br + \pi r^2 + ah_a - ah_a + 2ar + 2br - 4br^2/h_a$

$= 4ar + 4br + \pi r^2 - 4br^2/h_a$

AUFGABE 4 (Leichtathletik-Stadion)

Hier sind individuelle, kreative und und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht. Gute Lösungen werden im nächsten Schuljahr von uns veröffentlicht.