Mathe-Treff OTW 2022

Lösungen für die Klassenstufe 9/10 (Sekundarstufe I)

AUFGABE 1 (Der Baumwipfelpfad)

L = linker Fuß R = rechter Fuß S = überspringen

Stufe	Ayse	Bertha	Christine
1	L	L	L
2	R	S	S
3	L	R	S
4	R	S	R
5	L	L	S
6	R	S	S
7	L	R	L
8	R	S	S
9	L	L	S
10	R	S	R
11	L	R	S
12	R	S	S
13	L	L	L

a) Aus der Tabelle sieht man, dass es Stufe 7 ist.

b) Ayse: Stufe 2; Bertha: Stufe 3; Christine: Stufe: 4

c) Aus der Tabelle sieht man, dass es Stufe 13 ist.

d) Ayse betritt immer eine gerade Stufe mit dem rechten Fuß und Bertha immer eine ungerade Stufe mit dem rechten Fuß, also können sie nie mit dem rechten Fuß die gleiche Stufe betreten.

e) Das Problem reduziert sich auf eine Fibonacci-Folge.

Somit hat Finn 21 Möglichkeiten, die 8 Stufen zu bezwingen.

Folgende Erklärung:

Wenn die Treppe nur 1 Stufe hat, gibt es nur eine Möglichkeit, denn er springt immer auf die erste Stufe.

Auch bei 2 Stufen gibt es nur eine Möglichkeit, denn mit dem zweiten Schritt hat er die

Treppe hinter sich.

Wie ist nun eine Treppe von n Stufen zu bewältigen:

Der Anfang ist klar:

f(1) = 1; f(2) = 1;

Nehmen wir an, wir wüssten, auf wie viele Weisen Fritz Treppen bis 5 Stufen bewältigen kann, uns ist also f(5), f(4), f(3) ... bekannt für eine Sechsertreppe hat er nun wieder 2 Möglichkeiten: Er nimmt eine Stufe oder 2 Stufen, kommt also von der 4. oder der 5. Stufe. Die 4. Stufe hat er auf f(4) , die 5. auf f(5) Weisen erreicht. Er nimmt die Sechsertreppe also auf f4) + f(5) Weisen, oder

f(n+1) = f(n)+ f(n-1)

Die Lösung des Problems lässt sich nun rekursiv finden:

f(1) = 1; f(4) = 3; f(7) = 13;

f(2) = 1; f(5) = 5; f(8) = 21;

f(3) = 2; f(6) = 8;

Es gibt also 21 Möglichkeiten, die Treppe in seinem Sinne hochzusteigen.

f) Das Problem reduziert sich auf eine Fibonacci-Folge.

Somit hat Finn 46 368 Möglichkeiten, die 24 Stufen zu bezwingen.

Folgende Erklärung mag helfen:

Wenn die Treppe nur 1 Stufe hat, gibt es nur eine Möglichkeit, denn er springt immer auf die erste Stufe. Auch bei 2 Stufen gibt es nur eine Möglichkeit, denn mit dem zweiten Schritt hat er die Treppe hinter sich.

Wie ist nun eine Treppe von n Stufen zu bewältigen:

Der Anfang ist klar: f(1) = 1; f(2) = 1;

Nehmen wir an, wir wüssten, auf wie viele Weisen Fritz Treppen bis 10 Stufen bewältigen kann, uns ist also f(10, f(9), f(8) ... bekannt. Für eine Elfertreppe hat er nun wieder 2 Möglichkeiten: Er nimmt eine Stufe oder 2 Stufen, kommt also von der 9. oder der 10. Stufe. Die 9. Stufe hat er auf f(9) , die 10. auf f(10) Weisen erreicht. Er nimmt die Elfertreppe also auf f(9) + f(10) Weisen, oder

f(n+1) = f(n)+ f(n-1)

Die Lösung des Problems lässt sich nun rekursiv finden:
f(1) = 1; f(4) = 3; f(7) = 13; f(10) = 55; f(13) = 233; f(16) = 987; f(19) = 4181; f(22) = 17711;
f(2) = 1; f(5) = 5; f(8) = 21; f(11) = 89; f(14) = 377; f(17) = 1597; f(20) = 6765; f(23) =28657;
f(3)= 2; f(6) = 8; f(9) = 34; f(12) = 144; f(15) = 610; f(18) = 2584; f(21) = 10946; f(24) = 46368;

g)

Finn kann eine, zwei oder drei Stufen auf einmal nehmen. Zur 24. Stufe gelangt er also in einem Schritt von der 21., 22. oder 23. Stufe. Wir brauchen also nur zu wissen, wie viele Möglichkeiten er hat, um zu diesen Stufen zu kommen.

Anzahl "n" der Treppenstufen	Anzahl der Schritte	Schrittlänge (in Stufenanzahl)	Möglichkeiten Kombination Anzahl		Entwicklung (nachträglich)
1	1	1		1	g(1)=1
2	1	1		1	g(2)=1
3	3	1	1+1+1	2	g(3)=2
	2	1 und 2			
4	4	1	1+1+1+1	4	g(4) = 4= g(3)+g(2)+g(1)
	3	1 und 2	1+1+2		
	3	1 und 2	1+2+1		
	2	1 und 3	1+3		
5	5	1	1+1+1+1+1	7	g(5) = 7= g(4)+g(3)+g(2)
	4	1 und 2	1+1+1+2		
	4	1 und 2	1+1+2+1		
	4	1 und 2	1+2+1+1		
	3	1 und 2	1+2+2		
	3	1 und 3	1+1+3		
	3	1 und 3	1+3+1		
6	6	1		13	g(6) = 13 = g(5)+g(4)+g(3)
	5	1 und 2			
	5	1 und 2			
	5	1 und 2			
	5	1 und 2			
	4	1 und 2			
	4	1 und 2			
	4	1 und 2			
	4	1 und 3			
	4	1 und 3			
	4	1 und 3			
	3	1 und 2 und 3			
	3	1 und 2 und 3			
7				44	g(7) = 44 = g(6)+g(5)+g(4)
8				64	g(8) =64 = g(7)+g(6)+g(5)

Es wird klar, dass das Prinzip für alle Stufen ab n=4 gilt: wir (oder Finn) müssen nur die Anfangszahlen g(1)=1, g(2)=1 und g(3)=2 kennen.

Folglich ergibt sich: g(1)=1, g(2)=1 g(3)=2 g(4)=4 g(5)= 7 g(6)=13 g(7)=24
g(8)=44, g(9)=81, g(10)=149, g(11)=274, g(12)=504, g(13)=927, g(14)=1705
g(15)=3136, g(16)=5768, g(17)=10609, g(18)=19513, g(19)=35890, g(20)=66012,
g(21)=121415, g(22)=223317, g(23)=410 744, g(24)=755476

Finn könnte also auf 755476 verschiedene Arten unter den genannten Bedingungen über die 24 Stufen hinaufsteigen.

AUFGABE 2 (Zahlen wegwischen)

Da immer drei Zahlen weggewischt werden, muss die Anzahl der Zahlen n durch 3 teilbar sein.
Dies gilt für n=3, n=6, n=9, n=12, n=15 und n=18.

Weiterhin muss die Summe aller Zahlen an der Tafel gerade sein, denn für zwei Zahlen a und b gilt, dass die dritte weggewischte Zahl (a+b) sein muss. Die Summe dieser drei Zahlen ist 2(a+b) und somit gerade.

Es gilt$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, also muss $n\cdot(n+1)$ durch 4 teilbar sein.

Fall 1: n ist durch 4 teilbar

Wenn n durch 4 teilbar ist und auch durch 3 (erste Bedingung), so ist n wegen der Teilerfremdheit durch 12 teilbar. Dies gilt nur für n=12.

Fall 2: n+1 ist durch 4 teilbar

Wenn n+1 durch 4 teilbar ist, ist auch n-3 durch 4 teilbar. Da n durch 3 teilbar ist, ist auch n-3 durch 3 teilbar und somit ist n-3 durch 12 teilbar. Dies gilt nur für n=3 oder n=15.

Emma kann also nur alle Zahlen wegwischen, wenn n=3, n=12 oder n=15 ist.

AUFGABE 3 (Würfelbau)

Ist n die Anzahl der Spielwürfel auf einer Kante, so enthält der gebaute Würfel genau n^3 Spielwürfel, da er massiv, d.h. ohne Hohlräume, sein soll. Da der massive Würfel – nach Angabe - aus mehreren Spielwürfeln gebaut wird, d. h. $n>1$ ist, gilt:

Zur Summe S der Augenzahlen auf seiner Oberfläche steuert jeder der

- 8 Eckwürfel jeweils genau 3 Augenzahlen, also mindestens $1 + 2 + 3 = 6$ je Würfel bei,
- $12\cdot(n-2)$ Kantenwürfel, die nicht Eckwürfel sind, jeweils genau 2 Augenzahlen, also mindestens $1 + 2 = 3$ je Würfel bei,
- $6\cdot(n-2)^2$ Würfel, die weder Kanten- noch Eckwürfel sind, jeweils genau eine Augenzahl, also mindestens 1 je Würfel bei.

Der minimale S-Wert ist demnach

$$S_{min} = 8 \cdot 6 + 12 \cdot (n-2) \cdot 3 + 6 \cdot (n-2)^2 \cdot 1 = 6 \cdot (8 + 6n - 12 + n^2 - 4n + 4) = 6 \cdot n \cdot (n+2)$$

S kann kleiner als die Anzahl der verwendeten Spielwürfel sein, wenn S_{min} kleiner als n^3 ist.

$Smin < n^3$

$\Leftrightarrow 6 \cdot n \cdot (n+2) < n^3$ |:n (Dies ist erlaubt, da $n > 0$ ist.)

$\Leftrightarrow 6 \cdot n + 12 < n^2$

$\Leftrightarrow n^2 -6 \cdot n - 12 > 0$

$\Leftrightarrow (n - 3)^2 - 9 - 12 > 0$

$\Leftrightarrow (n - 3)^2 > 21$

$\Leftrightarrow n - 3 > \sqrt{21}$(Der Fall $-\sqrt{21}$ muss nicht betrachtet werden, da $n > 1$ ist.)

$\Leftrightarrow n > 3 + \sqrt{21} \approx 7{,}58$, also $n \geq 8$

Demnach muss die Anzahl der Spielwürfel mindestens $8^3 = 512$ sein.

AUFGABE 4 (Leichtathletik-Stadion)

Hier sind individuelle, kreative und und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht. Gute Lösungen werden im nächsten Schuljahr von uns veröffentlicht.