Mathe-Treff OTW 2022

Lösungen für die Klassenstufe 7/8

AUFGABE 1 (Der Baumwipfelpfad)

L = linker Fuß R = rechter Fuß S = überspringen

Stufe	Ayse	Bertha	Christine
1	L	L	L
2	R	S	S
3	L	R	S
4	R	S	R
5	L	L	S
6	R	S	S
7	L	R	L
8	R	S	S
9	L	L	S
10	R	S	R
11	L	R	S
12	R	S	S
13	L	L	L

a) Aus der Tabelle sieht man, dass es Stufe 7 ist.

b) Ayse: Stufe 2; Bertha: Stufe 3; Christine: Stufe: 4

c) Aus der Tabelle sieht man, dass es Stufe 13 ist.

d) Ayse betritt immer eine gerade Stufe mit dem rechten Fuß und Bertha immer eine ungerade Stufe mit dem rechten Fuß, also können sie nie mit dem rechten Fuß die gleiche Stufe betreten.

e) Das Problem reduziert sich auf eine Fibonacci-Folge.

Somit hat Finn 21 Möglichkeiten, die 8 Stufen zu bezwingen.

Folgende Erklärung:

Wenn die Treppe nur 1 Stufe hat, gibt es nur eine Möglichkeit, denn er springt immer auf die erste Stufe.

Auch bei 2 Stufen gibt es nur eine Möglichkeit, denn mit dem zweiten Schritt hat er die

Treppe hinter sich.

Wie ist nun eine Treppe von n Stufen zu bewältigen:

Der Anfang ist klar:

f(1) = 1; f(2) = 1;

Nehmen wir an, wir wüssten, auf wie viele Weisen Fritz Treppen bis 5 Stufen bewältigen kann, uns ist also f(5), f(4), f(3) ... bekannt für eine Sechsertreppe hat er nun wieder 2 Möglichkeiten: Er nimmt eine Stufe oder 2 Stufen, kommt also von der 4. oder der 5. Stufe. Die 4. Stufe hat er auf f(4) , die 5. auf f(5) Weisen erreicht. Er nimmt die Sechsertreppe also auf f4) + f(5) Weisen, oder

f(n+1) = f(n)+ f(n-1)

Die Lösung des Problems lässt sich nun rekursiv finden:

f(1) = 1; f(4) = 3; f(7) = 13;

f(2) = 1; f(5) = 5; f(8) = 21;

f(3) = 2; f(6) = 8;

Es gibt also 21 Möglichkeiten, die Treppe in seinem Sinne hochzusteigen.

f) Das Problem reduziert sich auf eine Fibonacci-Folge.

Somit hat Finn 46 368 Möglichkeiten, die 24 Stufen zu bezwingen.

Folgende Erklärung mag helfen:

Wenn die Treppe nur 1 Stufe hat, gibt es nur eine Möglichkeit, denn er springt immer auf die erste Stufe. Auch bei 2 Stufen gibt es nur eine Möglichkeit, denn mit dem zweiten Schritt hat er die Treppe hinter sich.

Wie ist nun eine Treppe von n Stufen zu bewältigen:

Der Anfang ist klar: f(1) = 1; f(2) = 1;

Nehmen wir an, wir wüssten, auf wie viele Weisen Fritz Treppen bis 10 Stufen bewältigen kann, uns ist also f(10, f(9), f(8) ... bekannt. Für eine Elfertreppe hat er nun wieder 2 Möglichkeiten: Er nimmt eine Stufe oder 2 Stufen, kommt also von der 9. oder der 10. Stufe. Die 9. Stufe hat er auf f(9) , die 10. auf f(10) Weisen erreicht. Er nimmt die Elfertreppe also auf f(9) + f(10) Weisen, oder

f(n+1) = f(n)+ f(n-1)

Die Lösung des Problems lässt sich nun rekursiv finden:
f(1) = 1; f(4) = 3; f(7) = 13; f(10) = 55; f(13) = 233; f(16) = 987; f(19) = 4181; f(22) = 17711;
f(2) = 1; f(5) = 5; f(8) = 21; f(11) = 89; f(14) = 377; f(17) = 1597; f(20) = 6765; f(23) =28657;
f(3)= 2; f(6) = 8; f(9) = 34; f(12) = 144; f(15) = 610; f(18) = 2584; f(21) = 10946; f(24) = 46368;

AUFGABE 2 (Das Buch)

Zunächst hat man die Seiten 1-9, welche je eine Ziffer haben. Das macht insgesamt neun Ziffern. Daraufhin folgen neunzig Zahlen von 10 bis 99 mit jeweils zwei Ziffern. Zu den neun Ziffern vom Anfang kommen also 2 mal 90 = 180 weitere Ziffern dazu. Bei Seite 99 hat man daher 189 Ziffern insgesamt erreicht.

Zieht man nun diese 189 von den 2022 ab, so bleiben noch 1833 Ziffern übrig. Teilt man das durch drei, so erhält man die Anzahl der dreistelligen Zahlen. Man erhält 611. Das heißt, dass nach Seite 99 noch 611 weitere Seiten kommen. Daher hat man insgesamt 99-611 = 710 Seiten.

Dazu kommen unter Umständen noch Leer- und Titelseiten oder eine Seite für das Inhaltsverzeichnis.

AUFGABE 3 (Papier zerschneiden)

Es ist nicht möglich auf diese Weise 2022 Papierstücke zu erhalten.

Wenn ein Stück Papier in 7 Stücke zerschnitten wird, so erhöht sich die Anzahl der Papierstücke um 6, wenn eins in 10 Stücke zerschnitten wird, so erhöht sich die Anzahl um 9. Da 6 und 9 beide durch 3 teilbar sind, erhöht sich die Anzahl der Papierstücke also bei jedem Schneiden um eine durch 3 teilbare Zahl.
Auch nach zweimaligem Schneiden, dreimaligem Schneiden usw. hat sich die Anzahl insgesamt um eine durch 3 teilbare Zahl erhöht. Es kann sich bei diesem Vorgehen also die Anzahl ausgehend von einem Papierstück am Anfang insgesamt nur um eine durch 3 teilbare Anzahl erhöhen. Man kann also nur Anzahlen erhalten, die um 1 vermindert durch 3 teilbar sind.
Nun ist aber $2022 - 1 = 2021$ nicht durch 3 teilbar, denn die Quersumme von 2021 ist 5. Also kann man 2022 Papierstücke niemals erhalten.

AUFGABE 4 (Leichtathletik-Stadion)

Hier sind individuelle, kreative und und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht. Gute Lösungen werden im nächsten Schuljahr von uns veröffentlicht.